CURS DE PROBABILITATS

Jaume Porta

1. INTRODUCCIO................. 2
2. PROBABILITAT 1............. 4
3. FREQUENCIA 1............... 6
4. INCOGNITA 1.................11
5. PROBABILITAT 2.............13
6. FREQUENCIA 2...............15
7. INCOGNITA 2................16
8. PROBABILITAT 3.............17
9. FREQUENCIA 3...............19
10. INCOGNITA 3................29
11. LLIÇONS....................31
12. CONDICIONADA...............32
13. PROBABILITAT 4.............34
14. FREQUENCIA 4...............36
15. INCOGNITA 4................42

Aquest curs funciona sobre aparells del tipus PC o compatibles amb sistema operatiu MS-DOS.

Consta de 14 lliçons o programes i un menú d'introducció. Els programes estan enumerats de l'1 al 14 per ordre ascendent de la matèria. Des de cada un dels programes es pot passar al següent i a l'anterior. Des del menú d'introducció es pot accedir a tots els programes i es pot marxar del curs.

En forma esquemàtica aquests programes són:

	0 Menú principal	
1 Probabilitat 1	2 Freqüència 1	3 Incògnita 1
4 Probabilitat 2	5 Freqüència 2	6 Incògnita 2
7 Probabilitat 3	8 Freqüència 3	9 Incògnita 3
10 Lliçons	11 Condicionada	
12 Probabilitat 4	13 Freqüència 4	14 Incògnita 4

A excepció dels programes 10 i 11, que són especials, tots els altres es poden classificar en tres tipus: tipus Probabilitat -que són els de la primera columna de l'esquema-, tipus Freqüència -que són els de la segona columna-, i tipus Incògnita -que són els de la tercera columna-.

En els programes de tipus Probabilitat es tracta simplement de calcular la probabilitat d'esdeveniments. En els de tipus Freqüència es representa les gràfiques de les freqüències relatives d'esdeveniments quan es realitzen molts experiments. Els programes de tipus Incògnita són una espècie de joc en què s'ha de descobrir esdeveniments a la vista de les gràfiques i de les freqüències aconseguides en la repetició de molts experiments.

Els programes esmentats també es poden classificar en quatre nivells, que corresponen a les quatre files que ocupen en l'esquema.

En el nivell 1 es considera solament l'experiment de tirar un dau, i es tracta un esdeveniment a cada programa, esdeveniment que es pot triar, però només un. En els del nivell 2 es continua tractant un sol esdeveniment, però ara l'experiment és el de tirar dos daus. En els nivells 3 i 4 l'experiment torna a ser el mateix de tirar dos daus, però en el 3 es consideren ja dos esdevenients, la seva reunió i intersecció, i en el 4 es tracten esdeveniments condicionats.

El programa 10, Lliçons, és un seguit d'explicacions sobre els conceptes de freqüència i probabilitat condicionades. En el programa 11 es va calculant, pas a pas, la freqüència condicionada a mesura que es va realitzant diferents cops un experiment.

En cada programa hi ha la presentació detallada d'uns fets probabilístics seguits d'una sèrie de preguntes encaminades a consolidar els conceptes i relacions implícits en els fets presentats. Aquesta forma de presentar-ho fa que l'assistència del professor sigui important. El professor ha d'ajudar a descobrir aquests conceptes i relacions.

El nivell de coneixements de Matemàtiques que han de tenir els alumnes és mínim. Es pot dir que solament cal saber operar amb les quatre regles bàsiques i saber manipular les més elementals expressions algebraiques. Per seguir estrictament el Curs de Probabilitat no cal conèixer res de Combinatòria. No obstant això, és convenient complementar aquest curs amb problemes i exercicis que, òbviament, comportaran el càlcul amb fórmules de combinatòria.

En el curs solament es parla de l'experiment de tirar daus. Ja s'ha dit abans que és convenient complementar-lo amb problemes: doncs bé, aquests problemes haurien de ser de tot tipus d'experiments per donar una visió més àmplia del tema.

Cada una de les lliçons o programes haurien d'anar precedides d'una explicació, -per part del professor- dels conceptes que s'hi desenvoluparan, per tal d'aconseguir el màxim rendiment del programa.

L'única pretensió del Curs és la de ser una eina a mà del professor per tal que pugui fer comprendre els conceptes i relacions elementals de probabilitat d'una forma fàcil, i a partir d'aquí poder construir sòlidament tota la teoria.

La gran simplicitat de les sis primeres lliçons fan que aquestes puguin ser assimilades per alumnes dels últims cursos d'EGB. El curs sencer pot ser desenvolupat a primer de BUP, si bé pot ser que les cinc últimes lliçons, atès que comporten el concepte bastant abstracte de probabilitat condicionada, en alguns casos, hagin de ser traslladades a cursos superiors.

PROBABILITAT 1

Aquest programa permet triar un esdeveniment referit a l'experiment de tirar un dau i calcular-ne la probabilitat.

L'esdeveniment es pot triar d'una llista que es presenta en començar, o bé l'alumne pot definir-lo triant les cares del dau que han de definir l'esdeveniment.

La llista d'esdeveniments proposats pel programa és:

1 - Treure un sis
2 - Treure múltiple de tres
3 - Treure parell
4 - Treure menor que cinc
5 - No treure sis

Un cop triat l'esdeveniment s'ensenya el conjunt de tots els casos possibles representat per les sis cares del dau, les cares corresponents a l'esdeveniment triat surten de color groc, mentre que les altres tenen el mateix color que el fons.

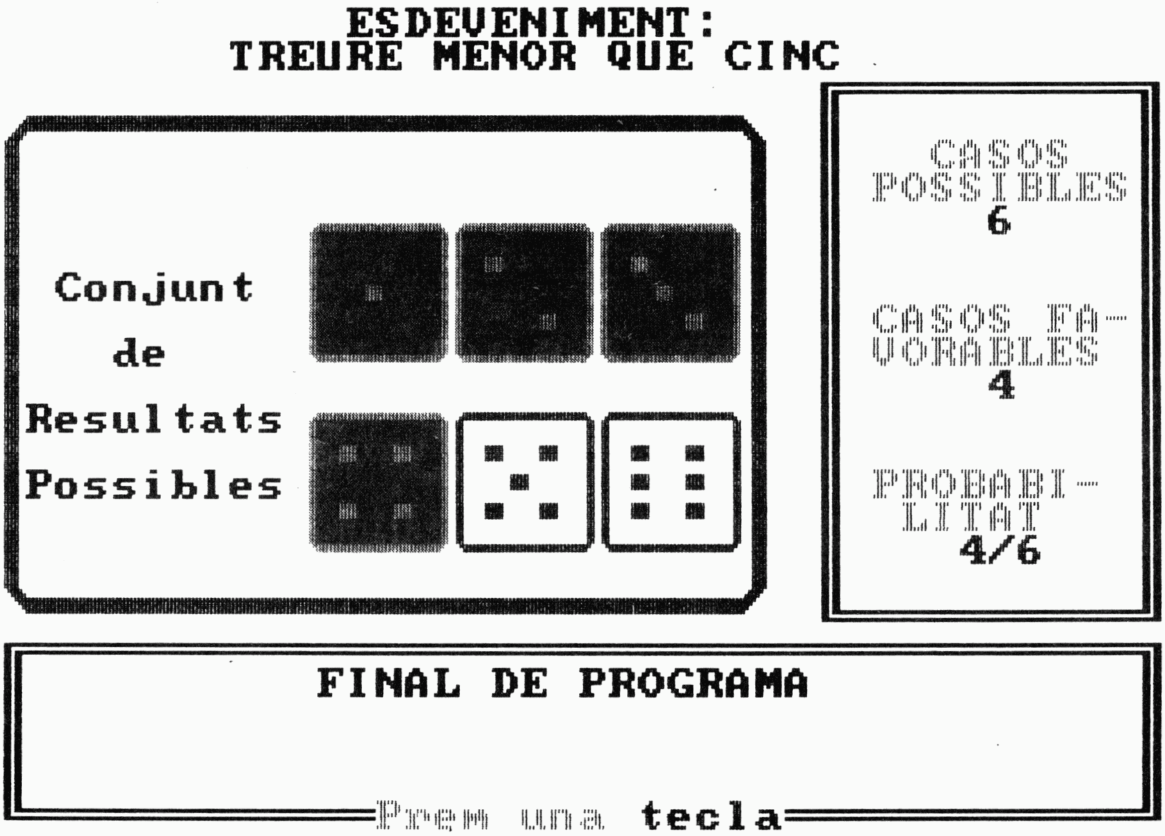
Si l'esdeveniment triat fos TREURE MENOR QUE CINC la pantalla és la que es veu més endavant.

A continuació es formulen les tres preguntes següents que s'hauran de contestar des del teclat.

Quants casos possibles hi ha?
Quants casos favorables hi ha?
Quina és la probabilitat de l'esdeveniment?

La probabilitat es pot entrar, tant aquí com a tot el curs, en forma decimal o en forma de trencat, reduït o no.

Cada pregunta ben contestada es va col.locant a la dreta de la pantalla, per obtenir una pantalla com la que es veu a continuació. Al final es torna al menú del començament.



Pantalla al final del programa Probabilitat 1

La pretensió d'aquest programa és simplement ajudar el professor a fer entendre a l'alumne, d'una forma gràfica, la Regla de Laplace, i els conceptes:

Experiment aleatori
Esdeveniment
Conjunt dels resultats possibles

A més a més, el programa pot servir per començar a donar una idea d'esdeveniment com a subconjunt, idea que queda molt clara quan s'ensenyen les cares del dau.

Com es pot veure, els mínims coneixements necessaris per entendre la lliçó d'aquest programa són els de saber el que és un dau.

FREQÜÈNCIA 1

Aquest programa simula una successió de tirades d'un dau. També s'haurà d'escollir un esdeveniment, d'entre els mateixos que presentava el programa anterior, o bé se n'haurà de definir un de nou.

Un cop triat l'esdeveniment es passa a la realització de la sèrie de tirades i a dibuixar la gràfica de les freqüències relatives de l'esdeveniment triat.

En començar la gràfica es veuran els dos eixos de coordenades, el vertical a l'esquerra i l'horitzontal a baix. A l'eix horitzontal s'hi comptabilitzarà el nombre de tirades de la sèrie (T.), mentre que a l'eix vertical s'hi comptaran les freqüències relatives (F.R.).

El màxim nombre de tirades que realitza el programa és de 300. Les freqüències relatives, naturalment, van de 0 a 1. L'eix vertical està dividit en sis parts iguals. Les divisions corresponen a les freqüències: 0, 1/6, 2/6, 3/6, 4/6, 5/6 i 1.

El dibuix que es veu per la pantalla, abans de començar la gràfica és el que es veu en la següent gràfica.

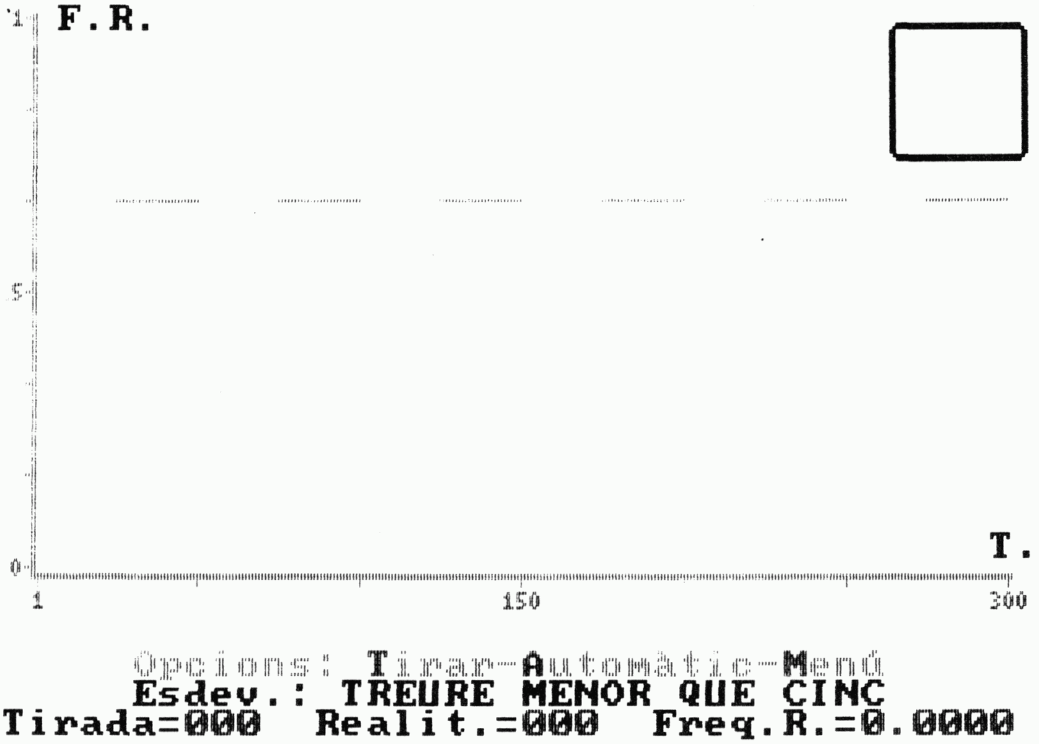
La línia horitzontal en intermitència, que es veu a la pantalla, queda situada a una altura de freqüències corresponent a la probabilitat de l'esdeveniment triat, i servirà de referència per controlar la gràfica que s'anirà formant.

El quadradet de l'angle superior dret de la pantalla representa el dau, on aniran sortint, en cada tirada, els puntets de la cara del dau que s'hagi tret a la sort.

L'antepenúltima línia de la pantalla diu:

Opcions: Tirar-Automàtic-Menú

i les lletres T, A i M són de color vermell, això vol dir que en aquest moments solament es poden prémer les tecles T, A i M; les altres no tindran cap resultat.



Programa Freqüència 1 abans de començar les tirades

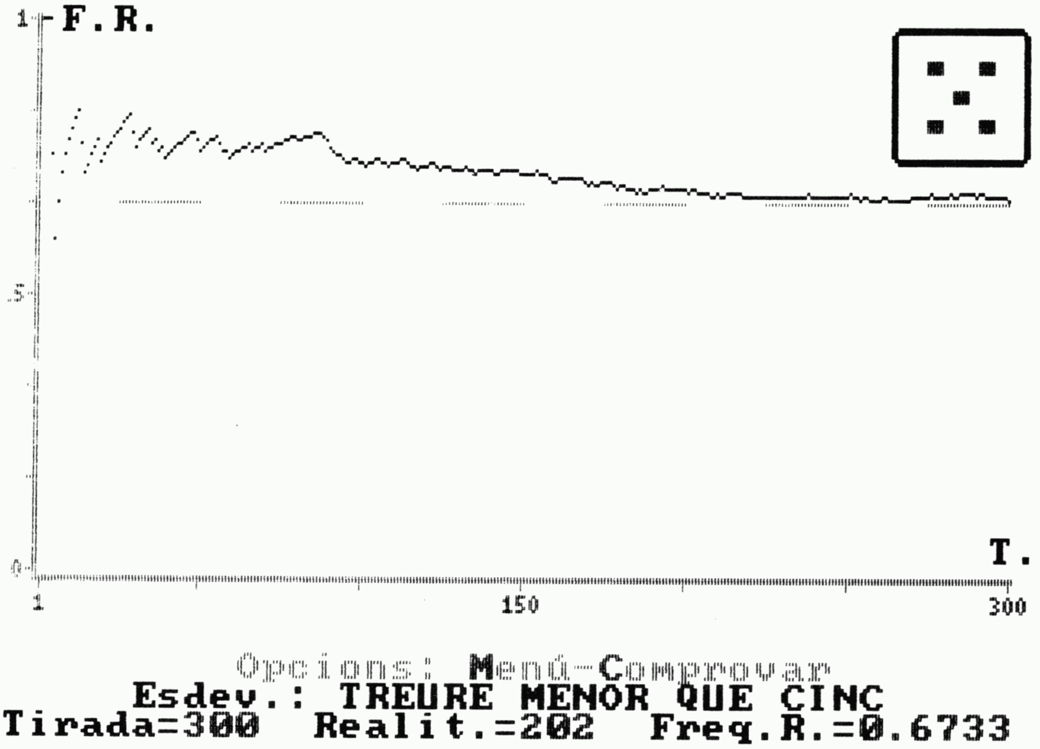
Cada cop que premis la tecla T es realitzarà una tirada. Immediatament sortiran els puntets del dau que han sortit en la tirada, i es dibuixarà el punt de la gràfica en el lloc que li correspongui segons el nombre de tirades fetes i segons la freqüència relativa aconseguida.

Si en lloc de prémer la tecla T, es prem, en algun monent, la tecla A, les tirades s'aniran succeint sense cap intervenció. En aquest moment direm que estem en MARXA AUTOMÀTICA en contraposició a la situació anterior que l'anomenarem MARXA MANUAL.

Òbviament si es prem la tecla M es torna al menú del començament del programa.

Per cada tirada es van actualitzant les tres dades que surten al peu de la pantalla, que són el nombre de tirades realitzades, els cops que s'ha realitzat l'esdeveniment i la freqüència relativa.

La marxa automàtica es para prement qualsevol tecla, o bé en arribar al màxim de 300 tirades.



Pantalla de Freqüència 1 un cop realitzades les 300 tirades

Un cop s'ha passat de les 200 tirades surt una altra opció: "Comprovar". Prement la C el programa formula un parell de preguntes:

Quina és la probabilitat de l'esdeveniment triat
Quina és la diferència, en valor absolut, entre la probabilitat i l'última freqüència relativa.

La probabilitat, la freqüència i la diferència queden anotades en un requadre de la pantalla i el programa fa saber que la diferència és molt petita, i es torna al menú del principi.

Si alguna de les preguntes és contestada incorrectament el programa treu un avís. Al tercer intent incorrecte el programa ensenya la resposta correcta.

Les primeres tirades del dau es poden fer en marxa manual (prement la tecla T cada vegada), per donar temps al professor per explicar el mecanisme del programa i comentar els conceptes que hi intervenen, que poden ser:

1 - Experiment aleatori
2 - Esdeveniment
3 - L'esdeveniment es realitza
4 - L'esdeveniment no es realitza
5 - Freqüència
6 - Freqüència relativa

Durant aquesta primera fase és interessant que l'alumne porti un control escrit del resultat de les tirades i les freqüències. Es podria fer en una taula on les entrades fossin:

Nombre de tirada
Resultat de la tirada
S'ha realitzat l'esdeveniment?
Freqüència
Freqüència relativa

Aquest control pot ser un estímul per a l'alumne en veure que els seus resultats coincideixen amb els de la màquina. Pot fer entendre millor tots els conceptes anteriors i pot fer comprendre millor el procés del programa.

Abans de passar a contestar les preguntes, quan s'han fet més de 200 tirades, s'hauria de fer veure una propietat important:

> En les primeres tirades, o sigui a l'esquerra de la pantalla, la gràfica presenta unes oscil.lacions molt acusades que van minvant a mida que augmenten les tirades, per acabar gairebé en una recta horitzontal, a les últimes tirades, molt pròxima a la probabilitat.

Aquesta propietat que podem anomenar estabilització de les freqüències relatives, és un fenomen que es presenta per qualsevol esdeveniment d'un experiment aleatori.

Les preguntes del final del programa, hi són per obligar l'alumne a veure que la diferència entre les freqüències i la probabilitat és sempre petita, o sigui que les freqüències s'acosten cap a la probabilitat.

Seria interessant fer més d'una passada a aquest programa, triant diferents esdeveniments, per tal de veure que la convergència freqüència-probabilitat és independent de l'esdeveniment triat.

Per acabar aquesta lliçó i per donar-li més generalitat es pot proposar l'exercici següent. L'alumne ha de tirar una moneda unes 20 o 30 vegades i triar l'esdeveniment: SORTIR CARA. Amb tots els resultats obtinguts hauria d'omplir una taula com l'esmentada anteriorment i realitzar la gràfica de les freqüències relatives.

Aquest exercici és una reproducció, en menys tirades, del mateix programa, però per un altre experiment. Sobre ell es poden fer les mateixes reflexions que del programa general.

INCÒGNITA 1

Aquest programa, com el Freqüència 1, simula també una successió de tirades d'un dau, però ara, l'usuari no pot triar l'esdeveniment, sinó que aquest serà seleccionat a l'atzar d'entre la llista dels cinc esdeveniments del programa anterior.

També es poden fer les tirades en marxa manual o bé en marxa automàtica, Ara, però, no sortirà la cara del dau ni el nom de l'esdeveniment. Això sí, naturalment, s'anirà representant punt a punt la gràfica de les freqüències relatives.

El funcionament del programa és similar al del programa anterior. Però ara, quan es cregui conéixer l'esdeveniment de que es tracta i si s'han realitzat 200 tirades o més, es podrà passar a l'opció "Identificar", prement la tecla I, en què s'haurà de dir quin és l'esdeveniment, la seva probabilitat, i la diferència entre aquesta i l'última freqüència relativa.

Es pot intentar identificar l'esdeveniment fins un màxim de tres cops. Si s'arriba als tres cops sense èxit, el programa dóna la solució.

Naturalment l'interés del programa gira a l'entorn del descobriment de l'esdeveniment incògnita.

Òbviament, per descobrir l'esdeveniment s'ha d'haver calculat prèviament les probabilitats dels cinc esdeveniments possibles i comparar-les amb les successives freqüències relatives obtingudes.

El fet d'anar comparant les freqüències amb les probabilitats contribuirà a assimilar, per part de l'alumne, la idea ja esmentada d'estabilització de les freqüencies entorn de la probabilitat, i contribuirà a profunditzar en el mateix concepte de probabilitat.

Aquest programa, com tots els del mateix tipus Incògnita del curs, pot crear a l'aula una atmosfera lúdica que el professor pot aprofitar i estimular per aprofundir més en el tema en qüestió i poder fer més amè el seguiment del curs.

Com tot joc, aquest programa pot donar un cert sentit de competitivitat, per exemple intentant descobrir la solució en les menys tirades possibles, o bé fent juguesques per veure si s'endevina abans de fer cap tirada.

Aquest programa és un petit exemple d'inferència estadística. Per reforçar, encara que inconscientment aquesta idea, es pot fer l'exercici següent: comptar els alumnes que són capaços d'endevinar l'esdeveniment en 5 tirades, en 10 tirades, en 20 tirades, en 50 tirades, i en 100 tirades. De les dades resultants els mateixos alumnes poden treure'n conclusions.

PROBABILITAT 2

Aquest programa és igual que el Probabilitat 1, només que ara l'experiment consisteix en tirar dos daus i naturalment els esdeveniments que es poden tractar són més complexos.

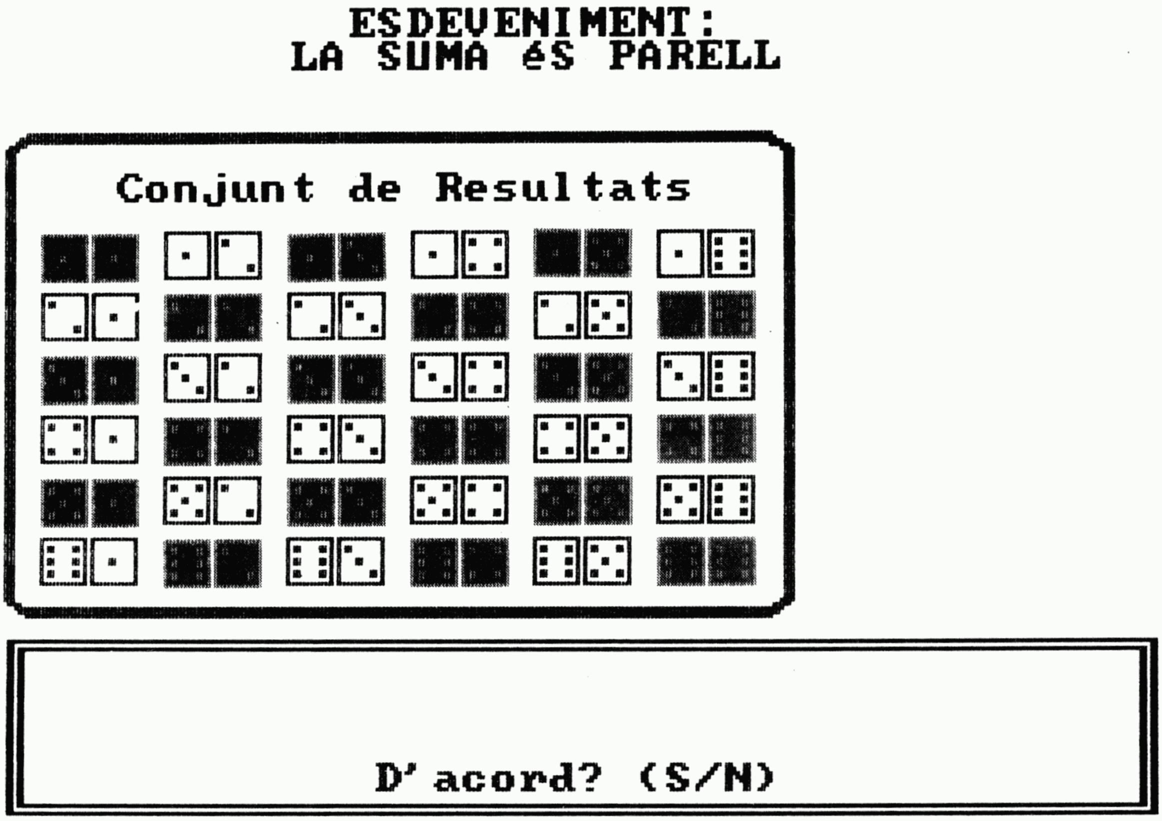
A l'hora de triar un esdeveniment, també es pot fer optant per un dels predefinits pel mateix programa, o bé, el pot definir el propi usuari.

L'esdeveniment triat també es mostrat per la pantalla, ara en daus més petit, ja que per cada element s'ha d'ensenyar dos daus, el que fa un total de 72 daus, tal com es veu en el gràfic de més endavant.

Tota la resta de programa és igual al Probabilitat 1.

Davant el dibuix que ens mostra el conjunt de resultats i l'esdeveniment és molt fàcil calcular els casos possibles i els casos favorables, així com també la probabilitat de l'esdeveniment.

Durant la presentació d'un esdeveniment per mitjà de la figura indicada pot ser el moment d'explicar perquè en el conjunt total s'hi ha col.locat 36 elements i no menys, és a dir perquè s'ha posat el resultat (2,3) i també el (3,2). Si no es fes així no es podria aplicar la Regla de Laplace.



Presentació dels esdeveniments en el programa Probabilitat 2

FREQÜÈNCIA 2

Aquest programa és pràcticament igual que el Freqüència 1 però amb l'experiment de tirar dos daus. Ara s'haurà de triar un esdeveniment d'entre:

1 - Sortir doble
2 - La diferència és múltiple de tres
3 - La suma és parell
4 - La diferència és menor que tres
5 - No sortir doble

Tot funcionarà igual que en el programa esmentat, però ara a la gràfica hi sortiran dos daus en lloc d'un, per anar simulant les tirades.

Aquest programa pretén consolidar els objectius que pretenia el programa Freqüència 1. Però a més a més Freqüència 2 ha d'habituar l'alumne a treballar amb esdeveniments de més complexitat. Per altra banda pot servir per preparar l'alumne per poder entendre més còmodament el programa Freqüència 3.

Naturalment, si el professor ho creu d'interés, es podran repassar els mateixos conceptes i es podrà fer parar l'atenció en els mateixos detalls que en el programa Freqüència 1. Fins i tot es pot fer la mateixa fitxa de seguiment que s'omplia en aquell programa.

Seguint la idea de realitzar un exercici paral.lel al del programa però amb un altre experiment, es podria fer tirar l'alumne 25 vegades tres monedes i considerar l'esdeveniment SORTIR SOLAMENT DUES CARES, omplir la taula corresponent i dibuixar la gràfica de les freqüències relatives.

INCÒGNITA 2

Aquest programa també simula tirades successives de dos daus i tria aleatòriament un esdeveniment d'entre els cinc disponibles a Freqüència 2, sense que l'usuari sàpiga de quin és aquest esdeveniment. El programa anirà dibuixant la gràfica de les freqüències relatives tal com es feia en els programes anteriors.

El funcionament és exactament igual que el d'Incògnita 1. Per la seva analogia amb el programa referenciat es poden fer les mateixes observacions pedagògiques que féiem per aquell programa, pensant que ara es tracta d'esdeveniments més complicats.

PROBABILITAT 3

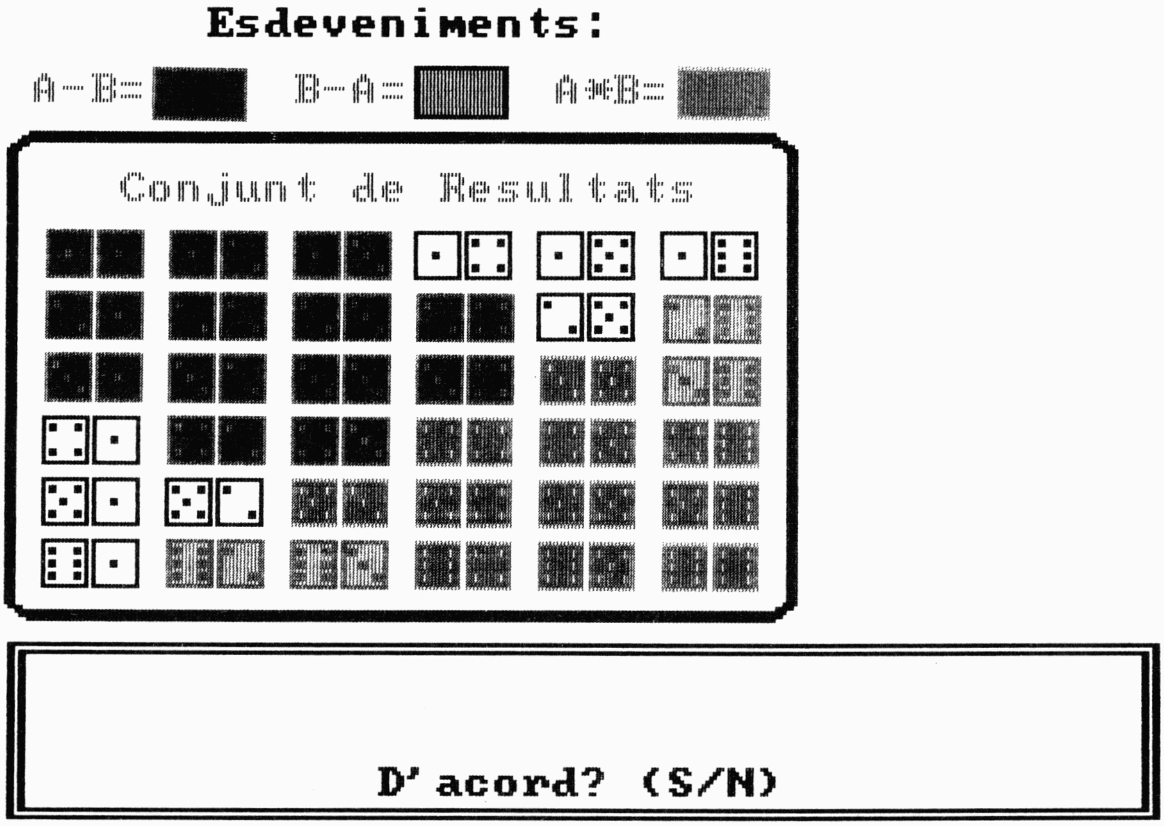
Es tracta d'un programa molt semblant al programa Probabilitat 2. També fa referència a l'experiment de tirar dos daus, però ara s'han de triar dos esdeveniments, que a partir d'ara s'anomenaran A i B.

Els esdeveniments es poden triar de la llista preparada, com la de Probabilitat 2, o es poden definir des del teclat.

Els dos esdeveniments s'ensenyen sobre el mateix conjunt de casos possibles, de manera que els daus del primer esdeveniment triat surten de color groc, els dels segon verd i els de la intersecció de color vermell, tal com es veu a la figura.

Ara les preguntes són diferentes, es demana directament la probabilitat d'A, la de B, la de la intersecció i la de la reunió, per acabar demanant per la suma: P(A)+P(B)-P(A*B), per tal de veure que sempre coincideix amb P(A+B).

Ara és el primer cop que surten els conceptes de REUNIÓ i INTERSECCIÓ d'esdeveniments: no cal dir que això mereix una explicació detallada. Es podria aprofitar la mateixa pantalla del programa en el moment en què es presenten els dos esdeveniments, ja que els dos esdeveniments estan dibuixats com una espècie de diagrama de Venn, encara que en colors.



Presentació dels esdeveniments en el programa Probabilitat 3

A = La diferència és menor que tres

B = La suma és major que set

FREQÜÈNCIA 3

També aquí s'ha de triar o definir dos esdeveniments de l'experiment de tirar dos daus. Els esdeveniments es poden triar d'entre:

1 - Sortir algun sis
2 - No sortir cap sis
3 - La suma és menor que deu
4 - La suma és menor que cinc
5 - La suma és major que set

Els dos esdeveniments triats A i B, es veuran a la pantalla tal com es feia en el programa Probabilitat 3.

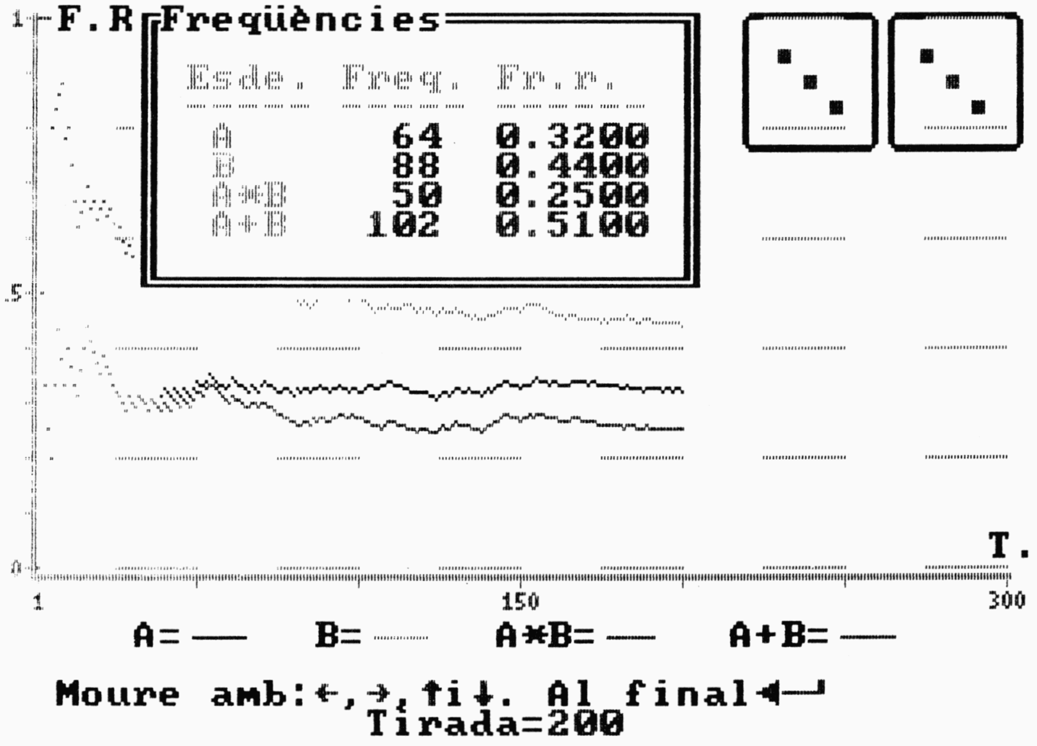
Ja a la part gràfica, com sempre, cada cop que es premi la T es farà una tirada. Però ara es representaran quatre puntets cada vegada,amb l'excepció que algun d'ells coincideixin. Dos d'aquests puntets corresponen a les freqüències relatives dels dos esdeveniments triats, un altre correspon a la freqüència relativa de la intersecció dels dos esdeveniments i el quart puntet correspon a la freqüència relativa de la reunió.

A peu de pantalla hi sortirà el nombre de tirades efectuades fins al moment.

Mentre es fan les tirades, segurament es tindrà necessitat de consultar numèricament les freqüències obtingudes fins ara pels quatre esdeveniments. Doncs bé, ara a la línia de les opcions n'hi ha una de nova, la "Freqüències". Prement la F surt a la pantalla una finestra amb les freqüències i freqüències relatives de tots els esdeveniments. Tornant a prèmer la F la finestra marxa.

Si quan tenim la finestra a la pantalla, no premem la F, sinó que premem la T o la A per continuar el procés, aquest prossegueix igual com sempre, amb la particularitat que les dades de la finestres es van actualitzant a cada tirada.

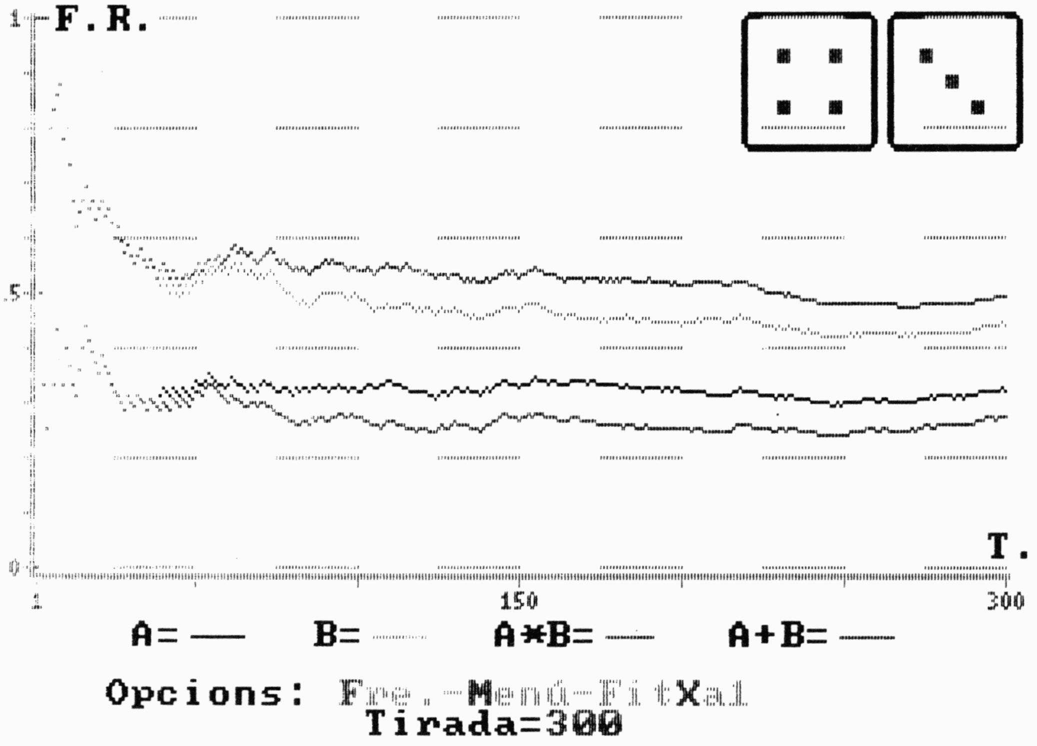
Si la finestra de les freqüències tapa una part de la gràfica, ens podem valdre de l'opció "Córrer". Premem la C estem en disposició de fer córrer la finestra al lloc on destorbi menys. Fer córrer la finestra es fa amb les tecles de les fletxetes i s'acaba amb ←┘.



Pantalla del programa Freqüència 3 amb les quatre gràfiques i la finestra de freqüències.
A=Sortir algun sis
B=La suma és major que set

Un cop superades les 200 tirades es té l'opció "FitXa1", de passar a contestar una sèrie de preguntes. A sobre de la mateixa gràfica apareix una fitxa en què van sortin les preguntes. L'última pregunta va acompanyada d'un dibuix que ensenya vuit possibles casos en que es poden trobar els esdeveniments triats, s'ha de contestar en quin cas estem. Més endavantes veu una d'aquestes fitxes.

En acabar d'omplir la fitxa 1, apareix l'opció "FitXa2", que fa sortir a la pantalla un nova fitxa amb diferents qüestions tal com assenyalem més endavant. Amb aquesta fitxa s'acaba el programa.



Pantalla del programa freqüència 3 un cop realitzades les 300 tirades

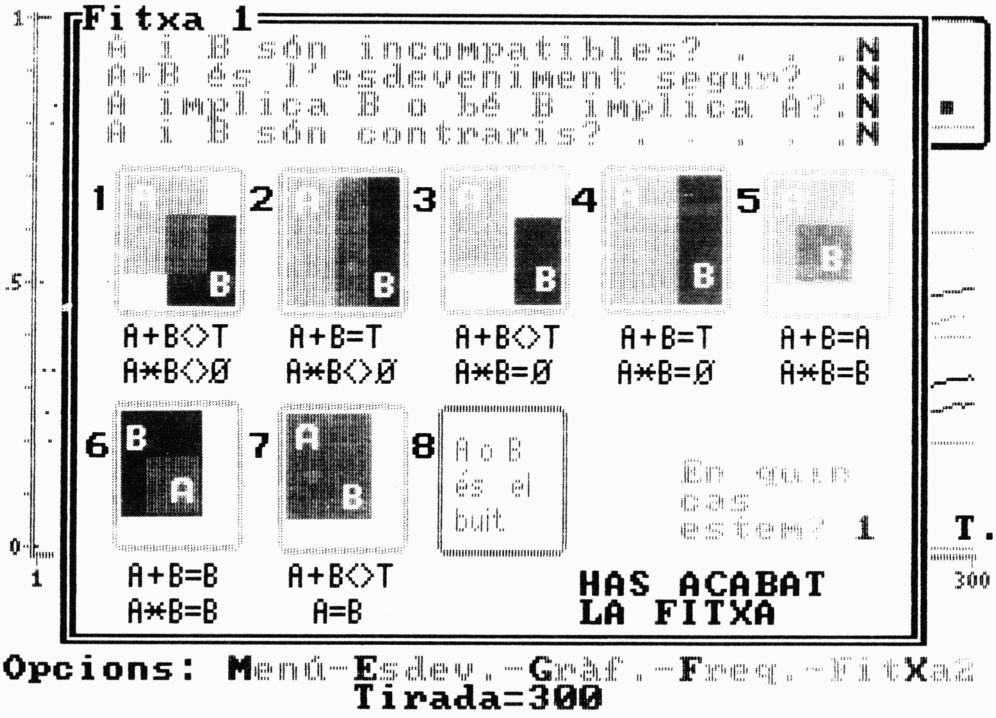
A = Sortir algun sis
B = La suma és major que set

Mentre es respon a qualsevol qüestió d'alguna de les dues fitxes esmentades, es té la possibilitat de veure la taula de freqüències prement F;de veure la gràfica prement G; de veure els esdeveniments triats prement E; i, en el cas d'estar a la fitxa 2, es pot veure la fitxa 1 prement X.

Tal com hem dit en anteriors programes, les primeres tirades s'hauran de fer en marxa manual per donar temps al professor a donar les explicacions oportunes. Aquestes explicacions poden tornar a incidir sobre els conceptes ja mencionats en programes anteriors, i també hauran d'incloure nous conceptes com ara:

Reunió o suma d'esdeveniments
Intersecció o producte d'esdeveniments
Esdeveniment segur
Esdeveniment impossible
Esdeveniments incompatibles
Esdeveniment contrari
Implicació d'esdeveniments

Aquests conceptes es poden començar a explicar quan a la pantalla s'hi veuen els esdeveniments triats.



Programa Freqüència 3, fitxa 1 plena

Programa Freqüència 3, fitxa 2 plena

Aquest programa s'hauria de passar més d'un cop, per crear situacions diferents. El primer cop que es passi és aconsellable triar els esdeveniments

Sortir algun sis
La suma és major que set

o bé es poden triar dos esdeveniments tals que la seva reunió no sigui el total, que la intersecció no sigui buida ni igual a cap dels esdeveniments. Aquestes condicions les compleixen els dos esdeveniments aconsellats i constitueixen un cas molt general.

És aconsellable, com en anteriors programes, que l'alumne porti un control de les primeres tirades, control que podria obtenir-se omplint una taula amb les entrades:

1-Nombre de tirada
2-Resultat
3-S'ha realitzat A?
4-S'ha realitzat B?
5-Freqüència d'A
6-Freqüència relativa d'A
7-Freqüència de B
8-Freqüència relativa de B
9-Freqüència d'A*B
10-Freqüència relativa d'A*B
11-Freqüència d'A+B
12-Freqüència relativa d'A+B

Serà important, mentre s'estigui omplint la taula anterior, fer veure que, per qualsevol tirada es compleix que

$$F(A)+F(B)-F(A*B)=F(A+B)$$

i també, en freqüències relatives

$$Fr(A)+Fr(B)-Fr(A*B)=Fr(A+B)$$

No solament s'ha d'esmentar aquestes fórmules mentre s'ompli la fitxa, sinó també es pot comentar davant la taula de freqüències, i per qualsevol esdeveniment sigui A, B, A*B o A+B.

Es pot comprendre que l'estudi de les fórmules anteriors és important ja que serà la base de la mateixa fórmula en probabilitats.

Les quatre gràfiques que surten en el programa Freqüència 3, tendeixen cap a la probabilitat del seu corresponent esdeveniment, cosa que podem simbolitzar així

$$Fr(A) \longrightarrow P(A)$$
$$Fr(B) \longrightarrow P(B)$$

Fr(A*B) ⟶ P(A*B)
Fr(A+B) ⟶ P(A+B)

D'aquesta forma es pot fer veure que si l'última igualtat esmentada és sempre certa, és d'esperar que en el límit, continuarà essent certa, o sigui

P(A)+P(B)-P(A*B)=P(A+B)

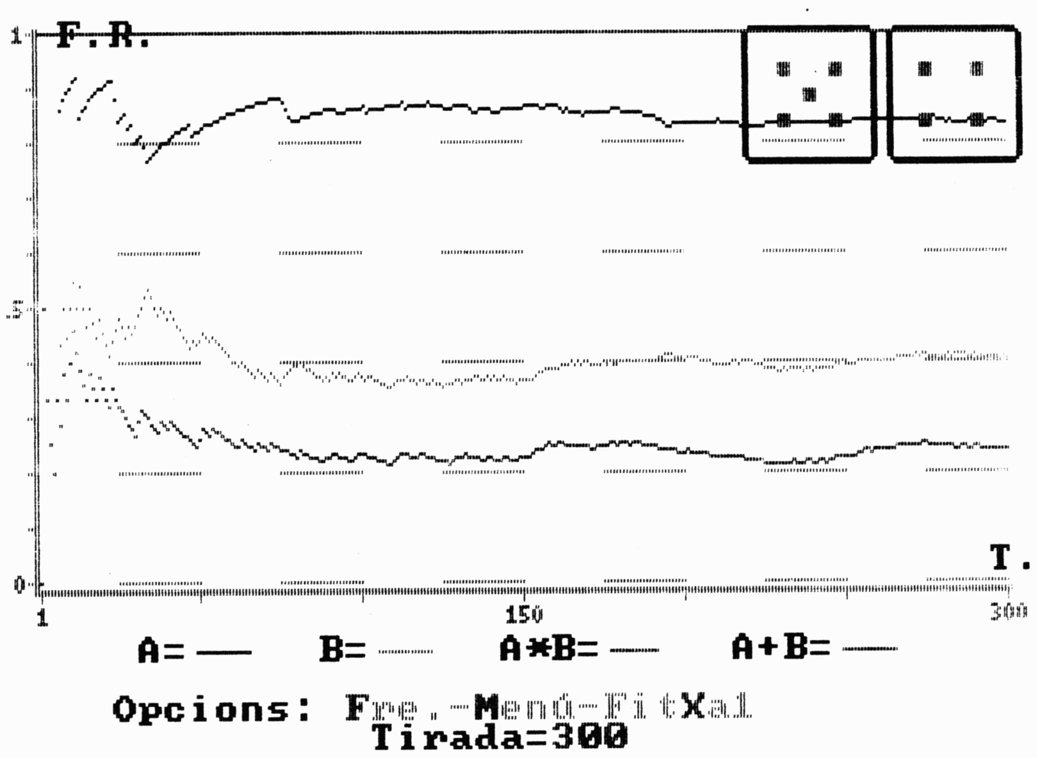
Així, fonamentant-nos en la idea intuitiva de probabilitat com a límit de les freqüències relatives arribem a una fórmula interessant de les probabilitats.

El fet de contestar a les dues fitxes de preguntes és una fase prou important perquè ho facin tots els alumnes del grup: per això seria convenient que cada alumne tingués prèviament les preguntes en fitxes i les contestessin tots al mateix ritme que el qui ho fa des del teclat.

Ja hem dit que aquest programa s'hauria de passar diferents cops. També hem dit com haurien d'esser els esdeveniments del primer cop que es passa, que no presenten cap particularitat específica. Per les altres vegades que es passi, els esdeveniments, els temes a tractar i les fórmules són per cada cas les següents:

SEGON CAS

Tema: ESDEVENIMENT SEGUR
Esdeveniments a triar: LA SUMA ÉS MENOR QUE DEU
LA SUMA ÉS MAJOR QUE SET
Fórmules: P(T)=1, Fr(T)=1
Gràfica que en resulta:



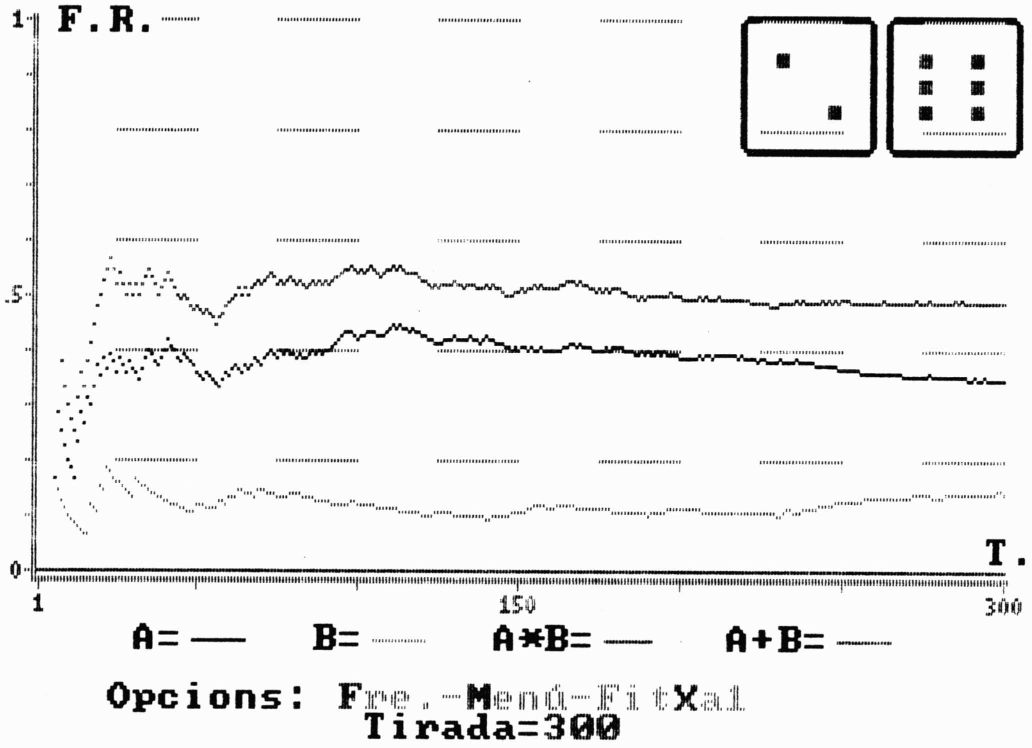
TERCER CAS

Temes : ESDEVENIMENT IMPOSSIBLE,
ESDEVENIMENTS INCOMPATIBLES
REGLA DE LA SUMA

Esdeveniments a triar: SORTIR ALGUN SIS
LA SUMA ÉS MENOR QUE CINC

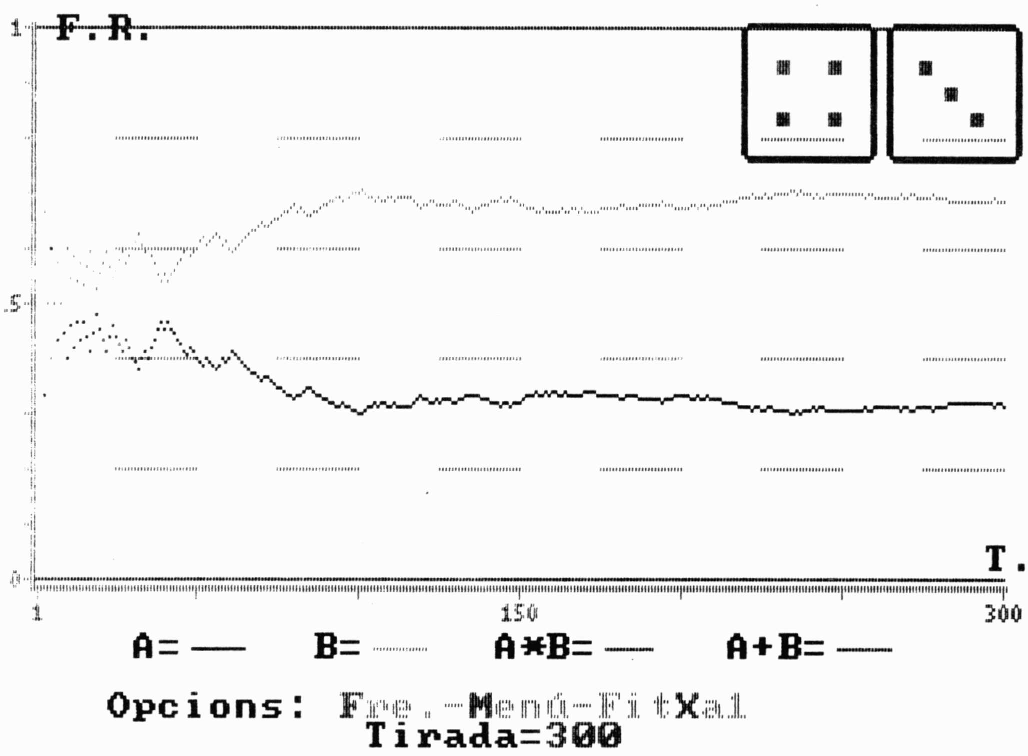
Fórmules: P(0)=0, Fr(0)=0
A*B=0 ⟶ F(A+B)=F(A)+F(B)
A*B=0 ⟶ Fr(A+B)=Fr(A)+Fr(B)
A*B=0 ⟶ P(A+B)=P(A)+P(B)

Gràfica que en resulta:



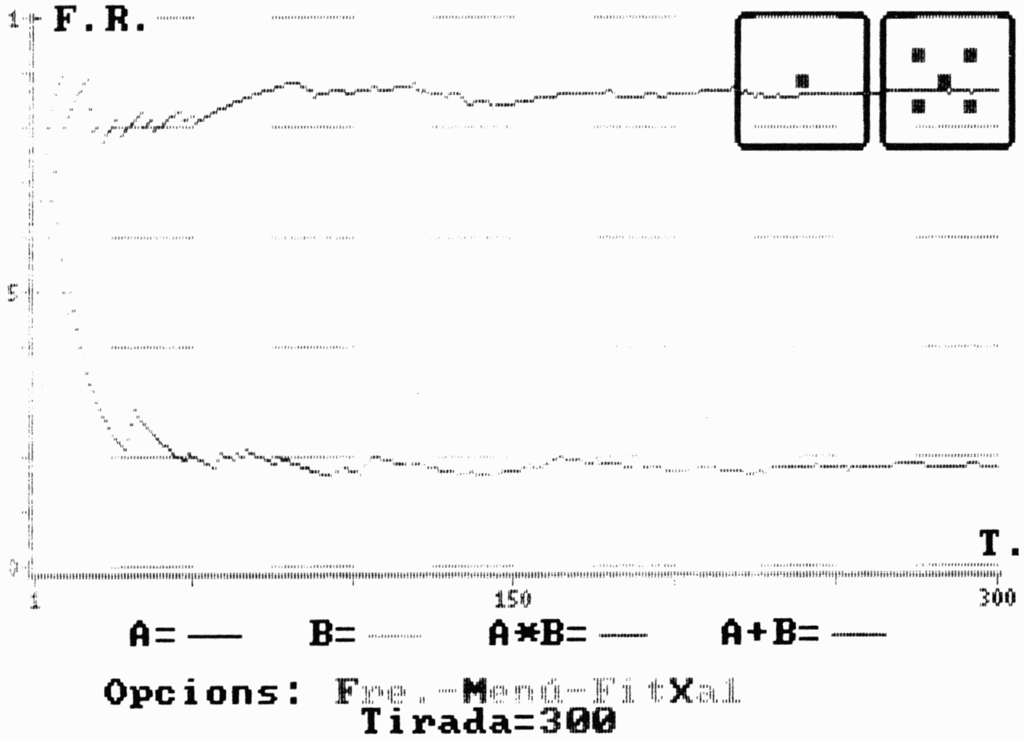
<u>QUART CAS</u>

Tema: ESDEVENIMENT CONTRARI
Esdeveniments a triar: SORTIR ALGUN SIS
NO SORTIR CAP SIS
Fórmules: Fr(A)=1-Fr(A)
P(A)=1-P(A)
Gràfica que en resulta:



<u>CINQUÈ CAS</u>

Tema: IMPLICACIÓ D'ESDEVENIMENTS
Esdeveniments a triar: LA SUMA ÉS MENOR QUE DEU
LA SUMA ÉS MENOR QUE CINC
Fórmules: B implica A ⟶ Fr(B)<Fr(A)
B implica A ⟶ P(B)<P(A)
Gràfica que en resulta:



INCÒGNITA 3

Com tots els programes de la gamma Incògnita, en aquest es tracta de descobrir esdeveniments. S'han de descobrir dos esdeveniments que el programa ha triat a l'atzar d'entre

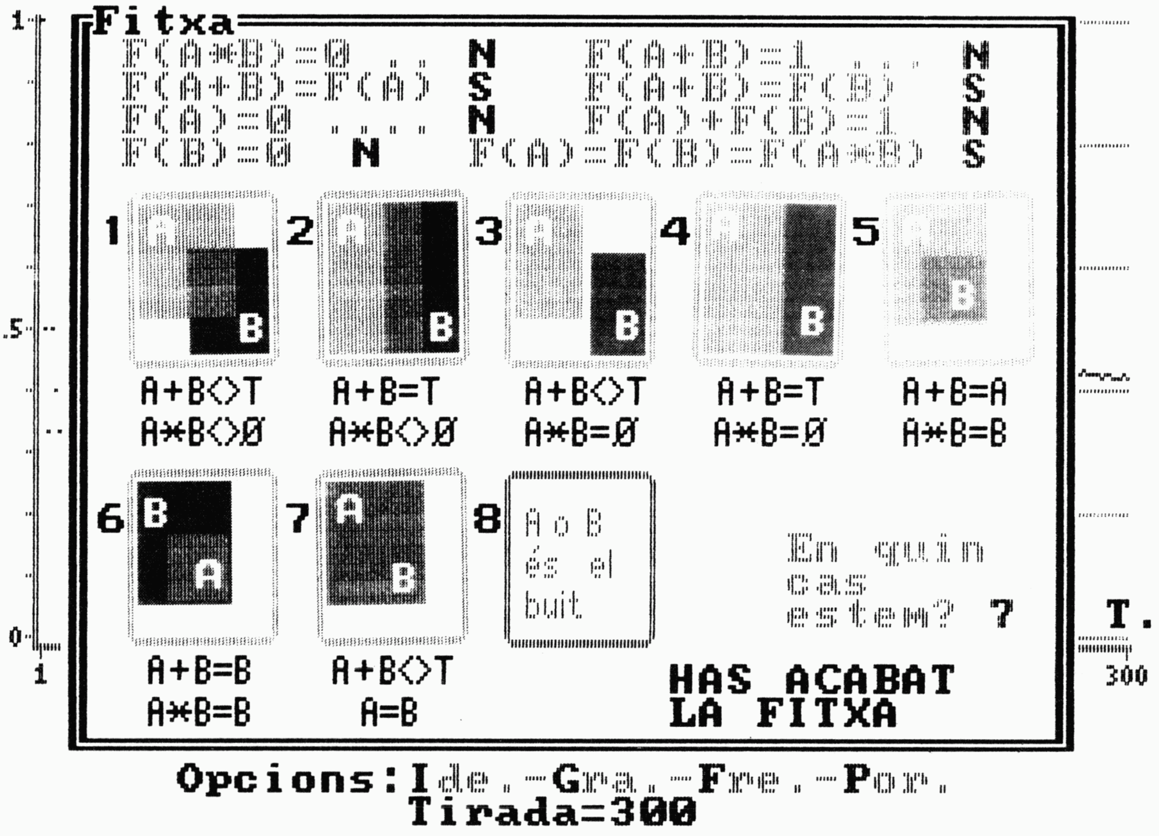
1 - Sortir algun sis
2 - No sortir cap sis
3 - La suma és menor que deu
4 - La suma és menor que cinc
5 - La suma és major que set

Naturalment tots aquests esdeveniments estan referits a l'experiment de tirar dos daus, i són els mateixos que sortien en el programa Freqüència 3.

El programa simula una successió de tirades de dos daus i dibuixa les gràfiques de les freqüències relatives dels dos esdeveniments que ha triat, i dibuixa també les gràfiques de les freqüències relatives de la reunió i de la intersecció, exactament com ho feia el programa Freqüència 3. La diferència està en el fet que ara l'usuari no tria els esdeveniments ni coneix quins són.

Quan es porten realitzades 200 tirades es té l'opció "FitXa". Si es prem la X, surt la sèrie de preguntes que es veuen en la figura següent, encaminades a fer més fàcil el descobriment dels esdeveniments. Mentre s'omple la fitxa es poden veure les freqüències prement F, i les gràfiques prement G.

Plena ja la fitxa, l'opció "Identificar" serveix per anar a identificar els esdeveniments. Mentre s'està en aquesta situació, a més de les opcions F i G anteriors, es té l'opció E, que permet veure dos esdeveniments, els que vol l'usuari d'entre la llista dels possibles.



Fitxa del programa Incògnita 3, abans d'identificar els esdeveniments incògnites

Els objectius d'aquest programa són els d'arribar a consolidar tots els punts tractats en el programa Freqüència 3. Aquest programa no és diferent en l'esperit dels del tipus incògnita. En realitat es preten crear una atmosfera de joc a la classe, per tal que dins d'aquesta es parli i pensi en termes de probabilitat, i d'aquesta forma es vagin consolidant tots el coneixements adquirits.

Si es porta un control de les probabilitats de tots els esdeveniments de la llista de possibles de la seva reunió i intersecció, és fàcil endevinar els esdeveniments incògnites. A la segona o tercera vegada que es passa el programa es detecten rapidament.

Per tal de posar-hi una mica més de dificultat i obligar l'alumne que s'esforci una mica més, es pot intentar fer descobrir els esdeveniments sense consultar la taula de freqüències, solament mirant les gràfiques obtingudes. S'hauria d'obtenir, a cop d'ull, unes freqüències aproximades, etc.

LLIÇONS

Aquest programa és molt senzill. Es tracta simplement d'una exposició literal de conceptes i relacions entorn de la freqüència relativa condicionada i la probabilitat condicionada.

L'exposició es fa paràgraf a paràgraf: cada cop que es premi l'espai surt un nou paràgraf. D'aquesta forma es fa més fàcil la lectura.

Les pàgines d'informació van enumerades del 0 al 9. Des de qualsevol lloc del programa es pot passar a qualsevol pàgina prement el nombre de la pàgina.

L'última pàgina, la 9, està dedicada a resoldre un petit problema d'exemple.

Els principals conceptes que surten en aquestes lliçons són els següents i en aquest ordre:

Esdeveniment condicionat per un altre
Freqüència relativa condicionada
Probabilitat condicionada

Seguint el fil de programes anteriors, la idea fonamental d'aquest programa és la de definir la probabilitat condicionada com a límit de les freqüències relatives condicionades. Aquesta forma de presentar s'aparta de les definicions tan formals amb què normalment es presentat aquest concepte.

S'ha introduit aquest programa de conceptes dins el curs per donar una visió del concepte de probabilitat condicionada, coherent amb les altres parts del curs, i que de passada sigui intuïtiu i de fàcil comprensió.

No és indispensable per al seguiment del curs que aquest programa es passi als alumnes. Es podria saltar i fer com amb la resta de conceptes, explicar-los a mesura que es tingui necessitat pel contingut dels programes. No obstant això, el concepte de probabilitat condicionada és prou subtil per aconsellar emprar els dos procediments: passar el programa i explicar-ho quan convingui.

El seguiment del programa amb alumnes s'hauria de fer molt a poc a poc, paràgraf a peràgraf, donant temps a llegir-lo, a comentar-lo i a anotar-ne els punts importants, com per exemple les fórmules, tornant enrera tots els cops que sigui necessari.

CONDICIONADA

El començament és igual al de Probabilitat 3 o Freqüència 3: fa triar dos esdeveniments, l'A i el B, i els ensenya de la mateixa forma. Però a partir d'ara, en aquesta mateixa pantalla i a la dreta dels esdeveniments hi surten:

Dos daus, per les tirades
La fórmula de la probabilitat condicionada
El valor numèric de P(A/B)
La descripció de tres casos que es poden donar

Aquests casos són:

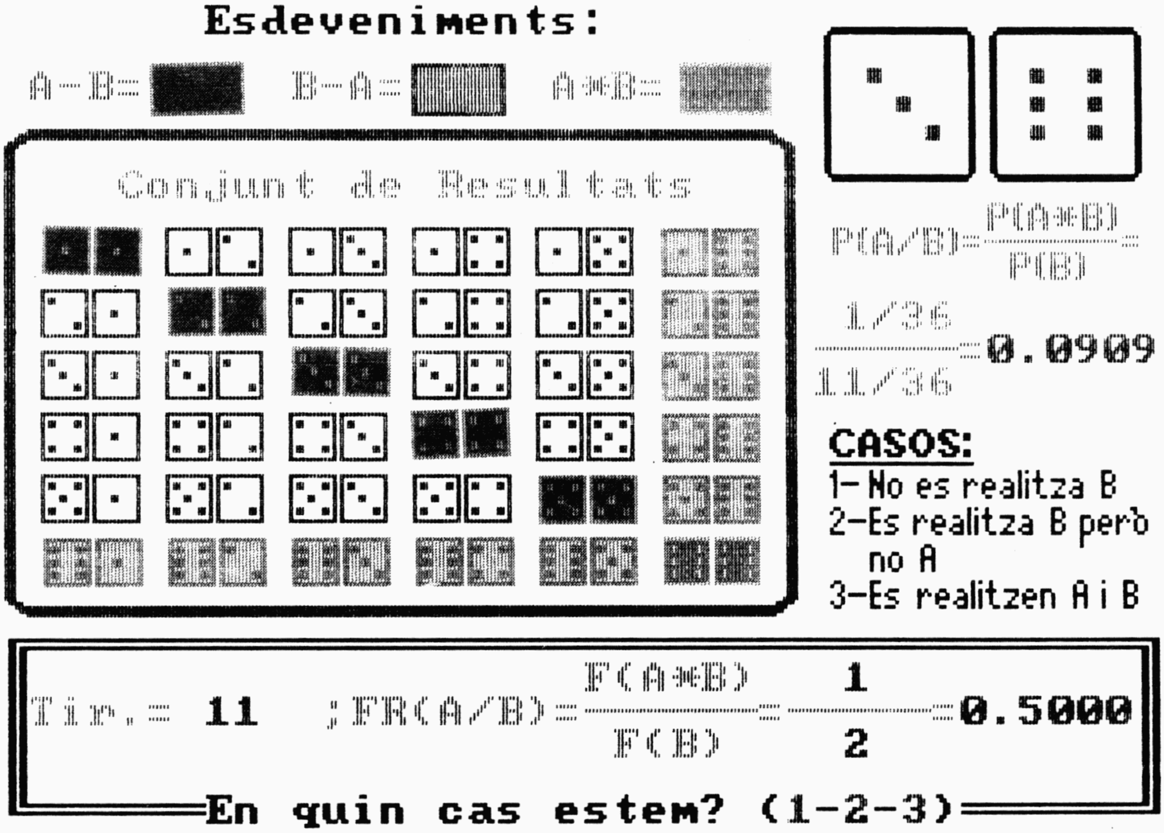
1 - No es realitza B
2 - Es realitza B, però no A
3 - Es realitzen A i B

L'exercici consisteix a realitzar una tirada de dos daus, entrar pel teclat el cas esdevingut i automàticament s'actualitzen les dades de la part de sota la pantalla, per calcular la freqüència relativa i així successivament fins que es vulgui.

Com es pot imaginar, l'interés del programa és el de reforçar la comprensió de la idea de freqüència relativa condicionada. Sembla que partir de casos concrets, juntament amb el fet de veure, per cada tirada, com evoluciona, segons el cas, la freqüència condicionada, pot donar una comprensió més profunda del concepte.

Aquest programa no té marxa automàtica com passava a d'altres. És així perquè en cada tirada es pugui prendre el temps suficient per analitzar totes les variacions que es produeixin.

La idea de convergència cap a la probabilitat per a la qual és necessària la marxa automàtica, és secundària en aquest programa: això serà el tema de Freqüència 4.



Pantalla del programa Condicionada després d'11 tirades

En cada tirada es podria comentar que els casos favorables són els d'A*B i els possibles els de B, cosa que respon a la fórmula

$$Fr(A/B)=\frac{F(A*B)}{F(B)}$$

o bé a la fórmula equivalent

$$Fr(A/B)=\frac{Fr(A*B)}{Fr(B)}$$

Aquesta idea s'hauria de recalcar en el sentit que els càlculs es realitzen com si el conjunt de possibilitats hagués quedat reduït al conjunt determinat per B, i els casos favorables, als determinats per A*B. És a dir: si no es realitza B, la tirada no val (cas 1); si es realitza B, és favorable en cas que també es realitza A (cas 3), i no és favorable si no es realitza A (cas 2).

PROBABILITAT 4

A la pantalla ens apareix un menú igual que el de Probabilitat 3, és a dir, caldrà triar dos esdeveniments, l'A i el B, de la mateixa forma. Desprès s'ensenyen els dos esdeveniments també de la mateixa forma.

A continuació es passa a fer una sèrie de preguntes. Són les següents:

Quants casos favorables té A?
Quants casos favorables té B?
Quants casos favorables té A*B?
Quina és la probabilitat d'A?
Quina és la probabilitat de B?
Quina és la probabilitat de A*B?
Quina és la probabilitat d'A/B?

El programa acaba fent veure que la probabilitat condicionada també es pot calcular així:

$$P(A/B)=\frac{\text{CasosFav.}(A*B)}{\text{CasosFav.}(B)}$$

El programa Lliçons ha servit per fer copsar una idea de probabilitat condicionada. En aquest es pretén exercitar el càlcul d'aquesta probabilitat.

Seria interessant que en successives passades d'aquest programa es triessin les parelles d'esdeveniments de forma que donessin casos diferents.

Per exemple una parella interessant seria

A = LA SUMA ÉS MENOR QUE DEU
B = LA SUMA ÉS MENOR QUE CINC

que es podrien triar en aquest ordre com en ordre invers.

O bé

A = LA SUMA ÉS MENOR QUE CINC
B = LA SUMA ÉS MAJOR QUE SET

Els dos esdeveniments següents són independents

A = LA DIFERÈNCIA ÉS MÚLTIPLE DE TRES
B = LA SUMA ÉS PARELL

Seria interessant comparar les probabilitats P(A) i P(A/B), i també triant-los en ordre invers.

FREQÜÈNCIA 4

D'entre els esdeveniments següents se n'han de triar dos, que es diran A i B.

1 - Sortir doble
2 - La diferència és múltiple de tres
3 - La suma dóna parell
4 - La diferència és menor que tres
5 - No sortir doble

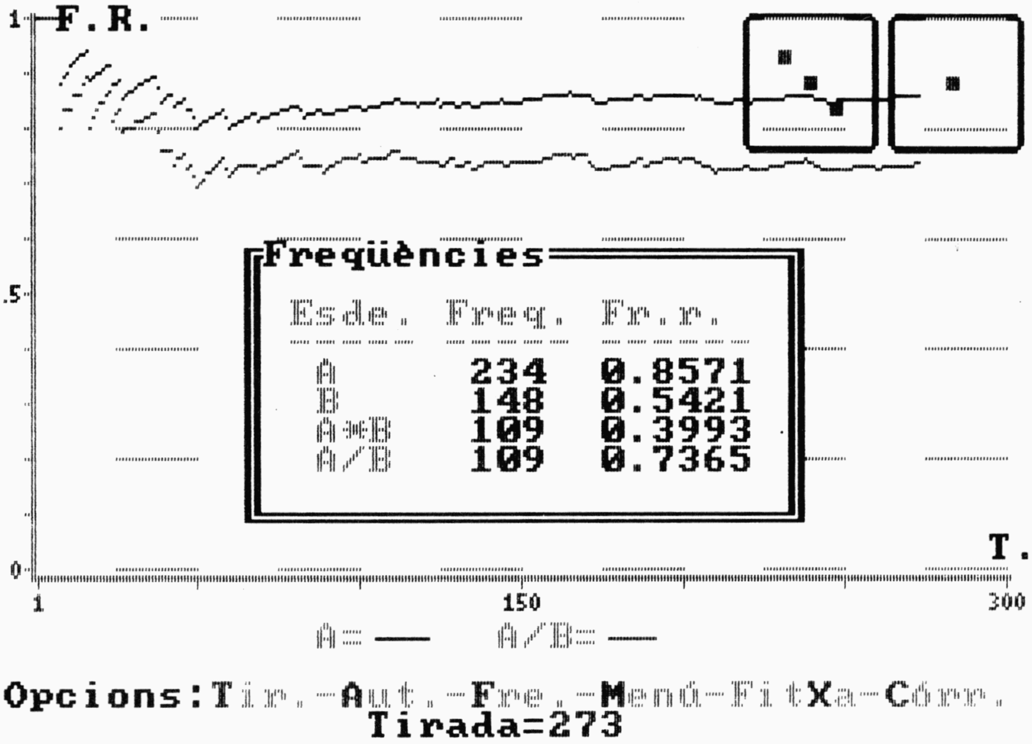
Com en d'altres programes s'ensenyaran els esdeveniments triats de la mateixa forma.

Seguidament es pot passar a fer tirades. El funcionament és igual que el dels altres programes de tipus Freqüència, però ara solament es dibuixaran dues gràfiques, la corresponent a les freqüències relatives d'A, i una altra corresponent a les freqüències relatives condicionades d'A respecte a B.

La finestra de freqüències també existeix i funciona igual que en d'altres programes.

Si s'han efectuat un mínim de 200 tirades es pot passar, prement la X, a omplir una fitxa, en què es demana la probabilitat dels esdeveniments que hi entren i la diferència d'aquesta amb les últimes freqüències relatives. També es fan altres preguntes que relacionen la probabilitat condicionada amb diferents relacions que poden existir entre A i B. Una fitxa d'aquestes es pot veure més endavant.

La finalitat d'aquest programa és la de mostrar pràcticament l'estabilització de les freqüències condicionades a l'entorn de la probabilitat condicionada.



Programa Freqüència 4

A = No sortir doble B = La suma dóna parell

Fitxa del programa Freqüència 4

El control escrit que també seria convenient que portessin els alumnes durant les primeres tirades d'aquest programa, es podria fer en una taula amb les entrades:

Número de tirada
Resultat
S'ha realitzat A?
S'ha realitzat B?
S'ha realitzat A*B?
Freqüència d'A
Freqüència de B
Freqüència d'A*B
Freqüència relativa d'A
Freqüència relativa d'A/B

El primer cop que es passa el programa es podria triar els esdeveniments:

A = No sortir doble
B = La suma dóna parell

S'han triat aquest dos esdeveniments perquè no tenen cap característica especial, cosa que ens proporciona un cas general.

Per altres cops que es passa es podrien veure els següents casos.

<u>SEGON CAS</u>

Tema: IMPLICACIÓ D'ESDEVENIMENTS

Esdeveniments per triar:

A = LA DIFERÈNCIA ÉS MENOR QUE TRES

B = SORTIR DOBLE

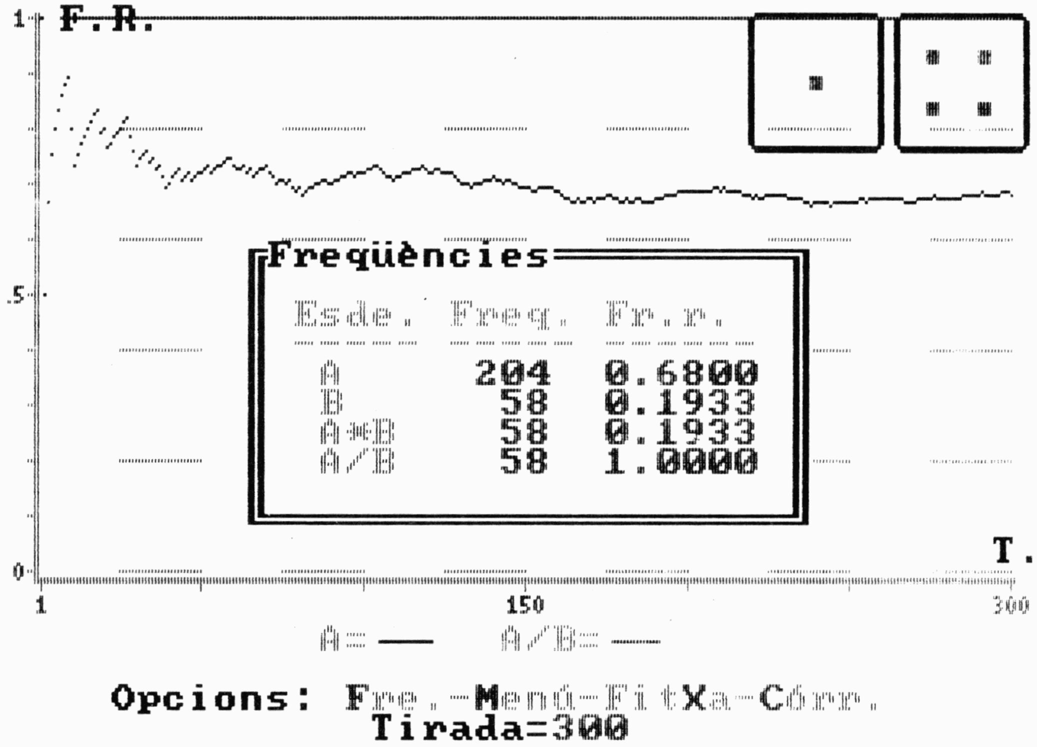
O també, triar-ho al revés, per veure la diferència

A = SORTIR DOBLE

B = LA DIFERÈNCIA ÉS MENOR QUE TRES

Fórmula: B implica A ⟶ P(A/B)=1

Gràfica resultant:



TERCER CAS

Tema: INDEPENDÈNCIA D'ESDEVENIMENTS

Esdeveniments per triar:

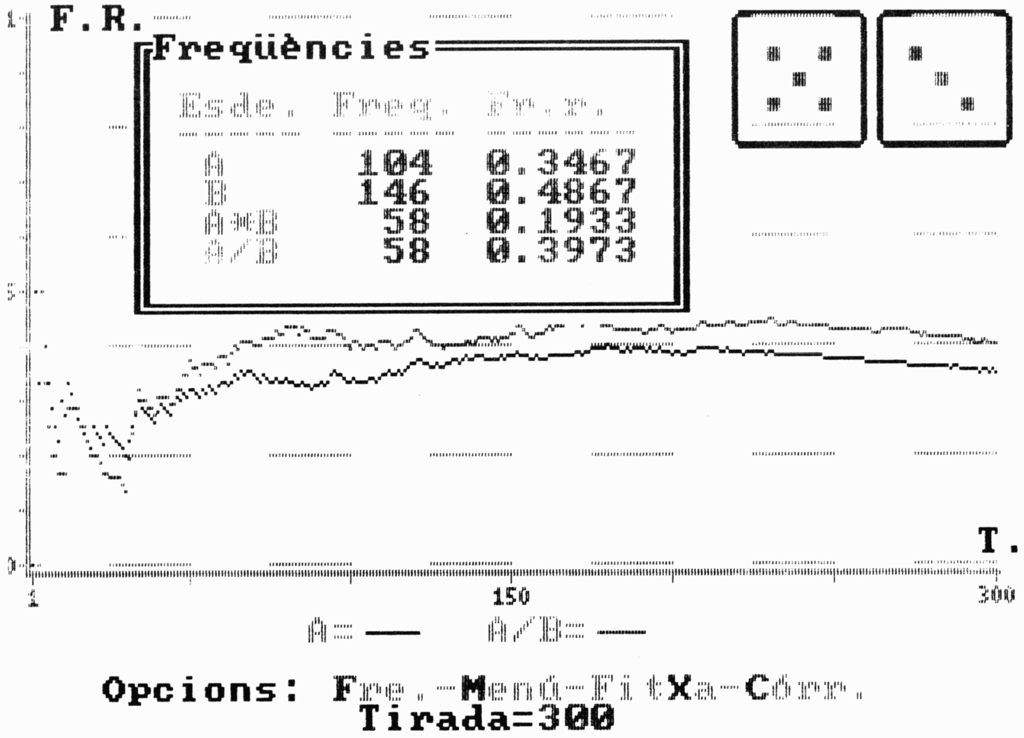
A = LA DIFERÈNCIA ÉS MÚLTIPLE DE TRES

B = LA SUMA DÓNA PARELL

També al revés, per veure que es conserva la indepen.

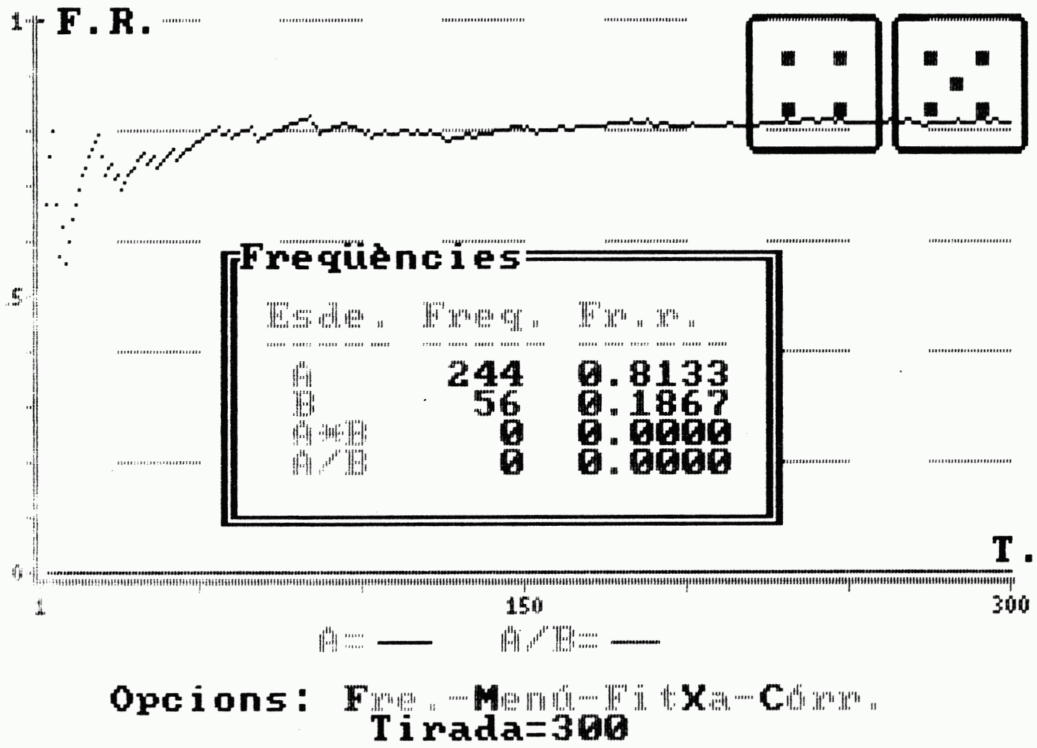
Fórmula: A indep. de B ⟶ P(A)=P(A/B)

Gràfica que en resulta:



<u>QUART CAS</u>

Tema: ESDEVENIMENTS INCOMPATIBLES
Esdeveniments per triar:
A = NO SORTIR DOBLE
B = SORTIR DOBLE
Fórmula: A*B=0 ⟶ P(A/B)=0
Gràfica que en resulta:



INCÒGNITA 4

Es tracta de descobrir dos esdeveniments que el programa ha triat a l'atzar, a la vista de la gràfica de les freqüències relatives d'un d'aquests i les freqüències condicionades d'aquest respecte a l'altre. No cal dir que els dos esdeveniments fan refènercia a l'experiment de tirar dos daus.

La llista d'esdeveniments entre els quals el programa tria és:

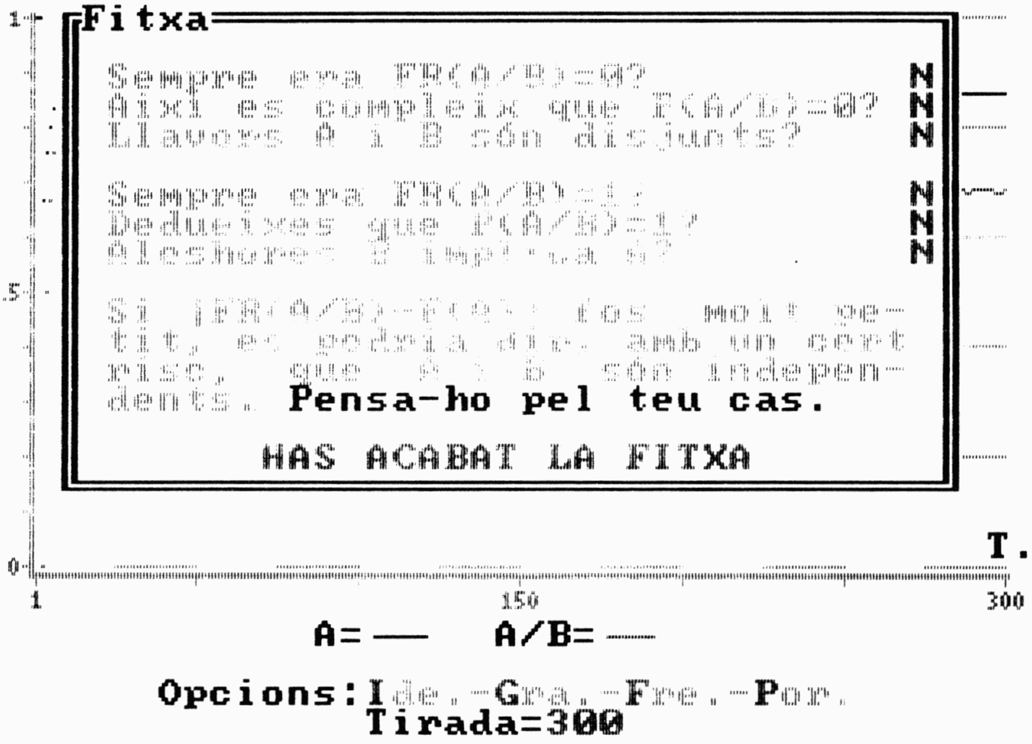
1 - Sortir doble
2 - La diferència és múltiple de tres
3 - La suma dóna parell
4 - La diferència és menor que tres
5 - No sortir doble

Aquí també funciona la finestra de freqüències però ara la informació és més reduïda, solament es donen les freqüències d'A i d'A/B.

Després de 200 tirades es podrà passar a omplir una fitxa de qüestions encaminades a fer més fàcil el descobriment.

Mentre s'omple la fitxa es pot consultar la taula de freqüències , prement la F, o es pot mirar la gràfica, prement la G. Si ja s'ha acabat la fitxa i s'ha entrat a "Identificar", a més de les dues opcions anteriors, es podrà veure la fitxa acabada d'omplir, prement la X.

És normal que si no es procedeix amb ordre pot ser difícil descobrir els esdeveniments. Seria interessant fer pensar als alumnes una tècnica que permeti una fàcil identificació.



Fitxa del programa Incògnita 4 abans d'identificar els esdeveniments